# МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

# «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

**Кафедра МОЭВМ**

# ОТЧЕТ

# по лабораторной работе №2

# по дисциплине «Элементы функционального анализа»

# Тема: Норма оператора

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студентка гр. 1384 |  | Усачева Д. В. |
| Преподаватель |  | Коточигов А.М. |

Санкт-Петербург, 2024

# Задание.

Вариант 17

1. Вычислить нормы оператора A в пространствах и
2. Вычислить нормы обратного оператора в пространствах и
3. Вычислить число обусловленности оператора А в пространствах и
4. Сформировать матрицу G=A\*A, показать, что она положительно определена. Найти ее собственные числа и векторы.
5. Вычислить число обусловленности оператора А в пространстве .

# Основные теоретические положения.

1. Оператором называется отображение 𝐴: 𝐹 → 𝐺, где F, G – некоторые пространства.
2. Оператор А: 𝑋 → 𝑌 действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y называется линейным, если: 𝐴(𝑘1𝑥1 + 𝑘2𝑥2) = 𝑘1𝐴𝑥1 + 𝑘2𝐴𝑥2 ∀ 𝑘1, 𝑘2 ∈ ℂ ∀ 𝑥1, 𝑥2 ∈ 𝑋
3. Нормой оператора А: 𝑋 → 𝑌 называется число ‖𝐴‖ = 𝑠𝑢𝑝{‖𝐴𝑥‖: ‖𝑥‖ < 1}
4. Линейный оператор A, отображающий пространство X на себя, называется обратимым, если существует 𝐵: 𝑋 → 𝑋 такой, что 𝐴𝐵 = 𝐵𝐴 = 𝐼, где I – единичный (тождественный) оператор.
5. Пусть A – линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Сопряженным к нему называется оператор A∗, определяемый соотношением (𝐴𝑥, 𝑦) = (𝑥, 𝐴∗𝑦) для любых x, y ∈ H
6. Числом обусловленности линейного оператора A называется: 𝑐𝑜𝑛𝑑(𝐴) = ‖𝐴‖ ∙ ‖𝐴−1‖. Число обусловленности определяет то, насколько чувствительна система ЛУ к изменению правой части.

# Выполнение работы

1. Вычислим нормы оператора A в пространствах и

Для норму считаем как максимум столбцовых сумм достигается норма на векторе

Для норму считаем как максимум строковых сумм достигается норма на векторе

1. Вычисление нормы обратного оператора в пространствах и

Для норму считаем как максимум столбцовых сумм достигается норма на векторе

Для норму считаем как максимум строковых сумм достигается норма на векторе

1. Вычислим число обусловленности оператора А в пространствах и

𝑐𝑜𝑛𝑑(𝐴) = ∙ = 476,7113

𝑐𝑜𝑛𝑑(𝐴) = ∙ = 491,3305

1. Сформируем матрицу G=A\*A, покажем, что она положительно определена. Найдем ее собственные числа и векторы.

Матрица G используется для расчета нормы оператора, отражающего в пространство , когда 𝐴 ≠ .

Собственные числа матрицы G:

= 0.9701

= 22.1559

= 1748.5478

= 92773.4005

Заметим, что все собственные числа положительны, откуда можно судить о положительной определённости матрицы G.

Собственные векторы матрицы G:

1. Вычислим число обусловленности оператора А в пространстве .

Необходимо вычислить число обусловленности матрицы A в пространстве

Норма A в этом пространстве выражается как корень из максимального из собственных чисел матрицы A A\*, т.е. G. Таким образом,

||A|| = = 304.5766

Норму можно получить из того факта, что, если матрица A имеет собственные числа , то матрица будет иметь собственные числа . Отсюда получаем, что норма будет равна корню из обратного к минимальному собственному числу матрицы G.

||A|| = 0.9701 = 1.0152

𝑐𝑜𝑛𝑑(𝐴) = 304.5766∙ 1.0152 = 309.2813